到目前为止，我们一直在讨论那些自认为主要是哲学家的人的作品。我们现在要考虑这样一个群体，他们对传统哲学问题（无论是物理学、伦理学还是逻辑学）很少表现出兴趣或根本没有兴趣，其中大多数人宁愿放弃哲学家的头衔，而更愿意被称为数学家。“数学”（ta mathēmata）一词源于“学习”（manthanein），在希腊语中不仅指我们所谓的数学研究，而且一般地指任何学问分支。比如在公元前4世纪，柏拉图在《理想国》中不仅用它来指算术或计算、平面几何、立体几何和天文学，还指对善的理型的研究。亚里士多德第一次对数学（mathēmatikē）和物理学（physikē）做出了系统区分。物理学研究的是自然物本身，自然是通过运动或变化的能力来定义的。数学对象（面、线、点和数）虽然事实上与感觉对象无法分离，却是从感觉对象中抽象出来加以研究的。在数学的各个分支中，他认识到一种等级结构。首先要研究算术、平面几何和立体几何，从属于这些的是数学的“更物理的”分支，如光学、和音学、力学和天文学，在这当中，亚里士多德（修改了柏拉图着重论述的一个论题）又进一步区分了数学光学（几何学的一个特殊应用）和物理光学：例如，物理光学包括对彩虹的研究，被认为是数学光学的一个特殊应用。

作为一种演绎研究，数学发展的转折点出现在公元前5世纪。在那之前很久，也就是在希腊人从事这项研究之前很久，埃及人和巴比伦人已经发现了许多数学命题，并且完善了许多数学运算。然而，尝试对数学定理进行严格证明是一个新的起点，这主要归功于公元前5世纪的希腊数学家。但他们的作品几乎没有保存下来，几乎在所有情况下，我们都不得不依靠后世的记述和间接提及。从公元前4世纪末开始，我们的资料状况有了很大改善。留存至今的第一部重要数学著作是欧几里得的《几何原本》（Elements）。除了其他流传下来的欧几里得的著作，阿基米德和阿波罗尼奥斯的大部分著作也仍然存在，从而为研究亚里士多德逝世后150年里数学的发展提供了丰富的资料。在评论这一点时，我将集中考察这样一些证据，它们有助于阐明数学的目标和假设、数学的方法以及数学在其他科学领域的应用。我们对欧几里得本人知之甚少。我 们 的 大 部 分 信 息 都 来 自 其 众 多 希 腊 评 注 者 中 最 重 要 的一位——公元5世纪的普罗克洛斯（Proclus）。他告诉我们，欧几里得生活在托勒密一世（公元前283年去世）的时代，“比柏拉图的学生们年轻，但比埃拉托色尼（Eratosthenes）和阿基米德年长”。1从这份记述的措辞中可以清楚地看出，普罗克洛斯本人并没有关于欧几里得出生日期和地点的确切信息。但认为他活跃于公元前300年左右很可能是正确的。不论他是否出生在亚历山大里亚，我们的一些资料来源都表明他与那个城市有关。托勒密问欧几里得，几何学中是否存在比《几何原本》更便捷的道路，普罗克洛斯记述了欧几里得对托勒密的回复：“几何学无捷径可走”。由帕普斯（Pappus）《数学汇编》（Mathematical Collection VII，35，678 10ff）中的一段文字可以推断，欧几里得在亚历山大里亚教书，那段文字说，阿波罗尼奥斯在那里和欧几里得的学生们待了很长时间。除了《几何原本》，欧几里得还写过关于天文学、光学和音乐理论的著作。他的一些短篇作品（如《光学》[Optics]）仍然存在，但有些被归于他的著作，比如《反射光学》（Catoptrics）或《镜论》（Theoryof Mirrors），并不真实。《几何原本》与之前发生的事情之间的关系引出了一个问题。根据普罗克洛斯的说法，欧几里得“将各个基本命题（elements）集合在一起，收集了欧多克索的许多定理，完善了泰阿泰德（Theaetetus）的许多定理，并以无可辩驳的证明提供了在前人那里证明不够严格的命题”。据说从公元前5世纪末希俄斯的希波克拉底开始，有几位作者编写了《几何原本》的各卷，普罗克洛斯还告诉我们，塔兰托的阿基塔斯和雅典的泰阿泰德（他们都是柏拉图的同时代人）“增加了定理的数量，并朝着一种更加科学的安排发展”。亚里士多德解释了“elements”一词是如何使用的：“我们把这些几何命题命名为‘基本命题’（elements），其证明蕴含在对所有或大多数其他命题的证明中”（《形而上学》998 a 25 ff）。由基本命题可以推导出其他命题。我们可以推测，之前的作者在基本命题方面的总体目标与欧几里得本人类似，即系统地展示一系列基本的数学证明。在许多情况下，欧几里得从前人那里得到的益处是可以确认的。把线定义为“没有宽的长”（第一卷定义2）与亚里士多德在《论题篇》（Topics，143 b II ff）中引用和批评的定义是相同的。第十卷的一位评注者指出，其中证明的命题是泰阿泰德的发现，该卷的另一位评注者说，其中三种主要的无理线是泰阿泰德区分的。第五卷的一位评注者告诉我们，该卷的一般比例论——通常被认为是整个《几何原本》中最出色的成果之一——要归功于尼多斯的欧多克索。对比例的兴趣可以追溯到希腊数学的最初阶段。但欧多克索理论的最大优点是，它既适用于可公度量，又适用于不可公度量（即既适用于1:2，又适用于1:√2），以及任何种类的量（数、线、面、体、时间等）。第十二卷中两个命题的证明同样被一位不亚于阿基米德的权威归功于欧多克索。这两个命题是第十二卷命题7和命题10：命题7表明，任何棱锥都是与之同底同高的棱柱的三分之一；命题10证明，任何圆锥都是与之同底同高的圆柱的三分之一。2《几何原本》的其他一些部分从早期希腊数学那里得到的益处——比如第七卷到第九卷即所谓的算术卷得益于毕达哥拉斯的数论——更难用文献证实，但 几 乎 同 样 确定。由这些观察引出的一个显而易见的问题是，《几何原本》中典型的欧几里得特征是什么？这本书中似乎并没有多少命题和证明是他自己的发现。毋宁说，他自己的主要贡献在于整部著作的组织方式。《几何原本》是一部高度系统化的作品。第一卷阐述了某些基本假设，并且讨论了平面几何中的一些简单问题（I47包含着对毕达哥拉斯定理的著名证明，即直角三角形斜边的平方等于其他两边的平方和）。这种讨论在接下来三卷中继续进行，当处理的问题涉及更复杂的几何图形时，将借助于进一步的定义来解决。第五卷介绍了比例论，然后在第六卷中，比例论被应用于平面几何问题。第七卷到第九卷补充了关于数的进一步定义，然后讨论了整数的本质和属性。第十卷讨论无理数。在第九卷到第十三卷中，欧几里得转向了立体几何问题，并且（在最后两卷）使用了基于第十卷命题1的穷竭法。除了第五卷和第七卷是重新开始以外，后面各卷都是以前面各卷的结论为前提和直接基础的。诚然，某些不规则和反常的情况是存在的，比如第一卷中的三个定义——长方形、菱形和长菱形——此后在《几何原本》中从未使用，但整本书仍然是对大量数学证明条理清晰、连贯协调的展示。

与任何之前的著作相比，《几何原本》是公理化演绎系统观念的例证和体现，但对于这种观念本身的起源，我们必须回到更早的数学和哲学文本。柏拉图在《理想国》（510 b-d）中一段著名但令人费解的话中声称，一切真理和实在都源于第一原理——善的理型——他称之为“非假设的”，以便将其地位与数学假设的地位进行对比，数学假设暂时被认定为真，但需要得到证实。亚里士多德更清楚地指出，并非所有真命题都能得到证明。他坚持认为，证明的起点是本身不可证明但被公认为真的原理，他区分了三类这样的原理：定义、假设和公理。欧几里得的《几何原本》实际上是一系列从第一原理出发的证明，这些原理本身并没有得到证明，而只是直接被断言。他也是从三种第一原理开始的，这些第一原理与亚里士多德所说的类似，但并不完全相同，即定义、公设和公理。公理大致上与亚里士多德的公理相对应，事实上，亚里士多德给出的一个公理的数学例子作为欧几里得的第三个公理在《几何原本》中重新出现：“等量减等量，其差相等。”然而，欧几里得的公设与亚里士多德的假设有所不同，至少就《后分析篇》72 a 18 ff中对这个术语所作的严格定义而言是如此。那里说，假设是关于某些事物存在的假定，通常的例子是点和线；而欧几里得五条公设中的前三条都是关于实现某些几何构造的可能性的假定（例如，“从任一点到任一点可作一条直线”），最后两条公设假定了与这些构造有关的某些真理，即所有直角都彼此相等，非平行的直线在某一点相交。公理是适用于整个数学的自明原理，而公设则是欧几里得几何学背后的基本几何学假定。欧几里得关于公理系统的形式和基础的总体构想，与 亚 里 士 多 德 在 研 究 一 般 推 理 的 背 景下所表述的那些构想有明显的相似之处，尽管我们无法确定这些相似之处在多大程度上缘于两者之间的直接影响，也无法确定欧几里得在多大程度上遵循和发展了在之前的数学家那里已经流行的想法。他所提出的那些定义、公设和公理有助于说明他的数学和整个希腊数学的本性。比如他在第七卷对单元和数的定义表明，“一”不被当作数来处理。每一个存在的事物凭借单元而被称为一（定义1），数是由若干单元组成的（定义2）。这里，欧几里得与后欧几里得时代的数学之间的差异不仅仅是出于惯例。在欧几里得那里，“一”本身就是不可分的，在第七卷的算术中，分数是作为数之间的比率或比例来处理的。为了理解这一观点的背景，我们可以回顾一下巴门尼德和埃利亚的芝诺在公元前5世纪提出的涉及一与多的哲学问题。欧几里得也许受到了柏拉图（《理想国》525de）所记述的那种论证的影响，柏拉图说，某些数学家不允许“一”被划分，“以免它看起来不是一个，而是许多个部分”。他们似乎认为，如果“一”可以被划分，那么“一”就会同时变成多：为了避免这个明显的矛盾，“一”——就像巴门尼德的“存在”——必须是不可分的。埃利亚学派的论证可能再次与我们对欧几里得第五条公理的理解有关。第五条公理说，“整体大于部分”——这似乎毫无问题。但我们从亚里士多德那里得知，芝诺反对“多”的论证之一旨在证明“一半时间等于它的两倍”。关于平行线的著名的第五公设争论背景更为复杂。亚里士多德（《前分析篇》65 a 4 ff）的一段话表明，当时关于平行线主题的流行的数学理论被认为犯了循环论证的错误，因为他评论说，那些“自认为能够构造平行线的数学家无意识地假定了倘若平行线不存在就无法证明的东西”。欧几里得的立场则截然不同，他先是在第一卷定义23中定义了“平行”，然后把非平行直线在某一点相交这一命题以公设的形式接受下来。没有证据表明，欧几里得或其他任何希腊几何学家设想过自罗巴切夫斯基（Lobachewsky，1792-1856）以来所构想的那些几何学的发展。但值得注意的是，欧几里得的《几何原本》不仅是一个公理系统，而且是一个明显假设性的系统——该系统基于一些公设和公理，他必定知道，其中有些命题曾经遭到其他希腊哲学家或数学家的质疑或否定。欧几里得先是以定义、公设和公理的形式阐述了他的假定，然后着手证明命题，并且解决他的构造问题。在他使用的论证方法中，有两种尤其突出，即所谓的穷竭法和更一般的“归谬”法。穷竭法可能是欧多克索的发现。该方法的基本原理在第十卷命题1中说明：给定两个不等的量（A和B），从较大量（A）中减去一个大于它的一半的量，再从余量中减去大于该余量一半的量，这样继续作下去，则会得到某个小于较小量（B）的余量。尽可能地重复这个减法过程，最终得到的余量将小于任何给定的量。在几何学中，这种方法的一个明显应用是确定由曲线围成的面积，比如一个圆的面积。这可以通过在其中内接规则的图形来实现，这些图形的面积将逐渐接近圆本身的面积。从一个正方形（图1中的ABCD）开始，每次将图形的边数加倍（也就是将弧AB、BC等平分，然后将弧AE、EB等平分，以此类推），由此可以增加内接图形的面积，直到它与圆的面积之差小于任意给定的量：然后可以认为圆的面积等于内接多边形的面积。

亚里士多德在其逻辑学中提到并讨论了“归谬法”，这种方法在欧几里得之前显然也在数学中得到了广泛应用。这种方法先假定与有待证明的命题相反的命题，然后导出不可能的或荒谬的结果。例如，它被用来证明素数的数目是无限的这个命题（第九卷，命题20）。首先假定素数的数目有限，然后证明这一假定是错误的：他表明，假定素数是一个有限集合，即A、B、C、......X，那么由这些数的乘积加上1所形成的数（A × B × C...× X）+ 1要么本身是一个不在这个集合中的新的素数，要么可被一个新的素数整除。正是由于这种简单而严格的证明，《几何原本》理所当然地成了名著，并且作为教科书取得了惊人的成功：直到20世纪，基于欧几里得译本的作品仍被用于各个学校的数学教学。我们要考虑的下一位思想家是叙拉古的阿基米德。作为数学家，他远比欧几里得更具有原创性，事实上是希腊科学所造就的最伟大的创造性天才之一。我们知道他死于公元前212年，当时马塞卢斯（Marcellus）统治下的罗马军队占领并洗劫了叙拉古。在《数沙者》（Sand-Reckoner）中，他把自己的父亲费迪亚斯（Pheidias）和欧多克索、阿里斯塔克一道列为“早期天文学家”。正如我已经指出的，我们的资料来源表明，阿基米德是叙拉古统治家族的朋友和亲戚。据说他曾访问亚历山大里亚，他当然知道埃拉托色尼并与之通信。但其一生中的大部分时间似乎都是在他的家乡叙拉古度过的。阿基米德兴趣很广，不仅包括算术和几何，还包括光学、静力学和水静力学、天文学和工程学。在我们的二手资料中，有几个关于他的故事与其工程师技能有关，我将在第七章讨论这一点。但是，除了阿拉伯文献中可疑地提到一本关于水钟的书之外，他唯一写的技术主题的书是《论球的制造》（On Sphere Making，现已不存），它讨论了如何构造一个球体来表示太阳、月亮和行星的运动——阿基米德本人显然制作了这样一架行星仪，它一直保存到西塞罗（Cicero）时代。西塞罗曾数次提到它，并且表达了对阿基米德技巧的钦佩，但遗憾的是，他并没有提供关于这个球体的本性或其运作方式的许多信息。此外还失传了一部光学论著和几本关于算术、几何和静力学的书（例如《论天平》[On Balances]）。即便如此，我们还是有至少九部完整或近乎完整的作品，以及其他几部作品的片段或拉丁文、阿拉伯文译本。作为阿基米德在算术方面工作的一个例子，我们可以举《数沙者》为例，它讨论了处理非常大的数所涉及的某些问题。在这部著作中，阿基米德给自己规定的任务是，基于三条主要假设来计算宇宙（即恒星天球）中包含的沙粒数量：（1）直径为一指宽的1/40的球体所包含的沙粒数量不超过10000颗；（2）地球的周长不超过3000000斯塔德；（3）恒星天球的直径与半径为日地连线的球体直径之比等于该直径与地球直径之比。进一步的假设和计算给出了第四个命题，即太阳绕地球运转的轨道周长小于30000个地球直径。在这部著作的导言中，他提到了阿里斯塔克的日心说（见下文）。阿基米德之所以提到这一观点并非因为赞同它（事实上他并不赞同），而是因为阿里斯塔克曾经提出，地球绕太阳运转的轨道直径与恒星距离之比，就如同该球体的中心与其表面之比。但既然球体中心没有大小，阿里斯塔克的说法暗示，恒星天球是无限的——这就使阿基米德的数沙问题变得不可能。因此，为了解决他的问题，阿基米德采用了上述形式（3）的假设。他得出的半径为日地连线的球体直径不大于1010斯塔德，恒星天球的直径不大于1014斯塔德。

虽然阿基米德描述了他为查明太阳直径在眼睛里所张的角而作的某些天文观测，但是显然，在这部论著中他之所以对天文学数据感兴趣，仅仅是因为他必须用这些数据来确切说明问题的条件。他深知，地球的周长远不及300万斯塔德，他还提到，一些天文学家计算出来的地球周长约为30万斯塔德。为使问题的条件尽可能严格，他采用了一个大得多的数。他在求解时，先是阐述了他发明的用来描述极大数的符号。希腊数学符号常常因其笨拙而受到批评——这是有原因的，虽然无论是缺少用来表示乘、除、等于、成比例等概念的符号，还是字母记数系统（其中α代表1，β代表2，γ代表3，ι代表10，ια代表11，κ代表20，ρ

6代表100，等等），都不妨碍进行与极大数或复杂分数有关的乘、除等复杂运算。但我们看到，阿基米德设计了一种能对一直到10!·#$!"的数进行命名的符号，他用七个希腊词极为简洁地将这个数称为hai mӯriakismӯriostas periodou riakisr mӯriakismӯriostōn arithmōn mӯriai mӯriades，字面意思是“万万个第万万周期的第万万级的单元”（a myriad myriad units of the myriad-myriadth order of the myriad-myriadth period）。于是阿基米德根据其最初的假设能够表明，恒星天球所能容纳的沙粒数目很容易用这种符号表示出来。他得出的实际结果是，这个数不大于我们所表示的1063。

阿基米德的主要兴趣在于几何学，现存的大多数论著都致力于几何学。例如，在《论圆的测量》（On the Measurement of the Circle）这部短篇著作中，他确定了圆的面积和周长，并且给出了π的算术近似值，即3+1/7>π> 3 + 10/71。在其他地方，他还讨论了诸如确定抛物线弓形或螺线弓形的面积，以及求球体或球冠的表面积和体积等问题。例如，在《论球体和圆柱体》（On the Sphere and Cylinder）中，他证明了以下定理，等等：（1）球体的表面积等于该球体大圆面积的四倍（即表面积=4πr2）；（2）球冠的表面积等于半径为从球冠顶点到球冠底圆上任一点所引线段的圆的面积（见图2）；（3）底等于球体大圆、高等于球体直径的圆柱体积比球体体积大半倍（由此可知，球体体积是4/3πr3）；以及（4）包括底面在内的球外切圆柱的表面积比球体的表面积大半倍。阿基米德将自己的工作与早期数学家的工作小心翼翼地区分开来，并承认自己受益于他们。但他在这部论著的导言中说，这些都是以前从未得到证明的新定理。图2 阿基米德《论球体和圆柱体》第一卷命题42证明，球冠AVA'的表面积等于半径为VA的圆的面积（V是该球冠的顶点）。第一卷命题43类似地证明，对于大于半球的球冠，球冠AV'A'的表面积等于半径为V'A的圆的面积。几何学论著的表达风格与欧几里得的《几何原本》类似。必要时，他会首先陈述定义和公设，然后按顺序证明定理，虽然与欧几里得不同，并且主要是由于欧几里得的工作，阿基米德能够将几何中许多基本定理的证明视为理所当然。他的论证方法也沿袭了欧几里得，但在某些方面也超越了欧几里得。例如，我们发现他修改了穷竭法。欧几里得往往是通过连续内接更大的正多边形来穷竭一个给定的面积，而阿基米德则常常是两面夹击。他同时使用内接和外切图形，以把它们压缩到与待测的曲线图形合并。这就是《论圆的测量》第一个命题的证明所依据的方法，第一个命题说，圆的面积等于两直角边分别等于圆的半径和周长的直角三角形的面积，正是这个方法给出了π必定落在其中的上限和下限。

\7阿基米德方法的一个更具原创性的方面是把力学概念应用于几何学问题。例如，基于静力学原理（特别是杠杆定律）的论证被用来解决确定未知面积或体积的问题。把一个平面图形想象成由一组排得无限紧密的平行线所组成，然后想象这些线被一个已知面积的图形中对应的相同大小的线所平衡，这样就可以根据已知面积求出所要求的面积。同样，把一个立体想象成由一组平面所组成，然后想象这些平面被一个已知体积的立体中的对应平面所平衡，这样就可以根据已知体积求出未知体积。在写给其同时代人埃拉托色尼的未完成著作《方法》（The Method）中，阿基米德谈到了这种方法：!"#$%&'()\*+#,-./0123456789:;<=>?@678<,ABCDEFGHIJKLM(NOJPQR!ST<@6UVWXY?Z[\N]^)\_`'aBbc!db(6IJ78efg5Nhi<jklmnoGHpqJKZ[rs<t#buv78Yrswx9LM/yz{|}Z[R~db@678ÄÅYPQ9(NÇ3<%ÉÑÖ&hdÜBáqÇ39àâäz{Z[ãåçR3阿基米德举了一个例子，并且称之为“我通过力学而知晓的第一个定理”，即任何抛物线弓形的面积都是与之同底等高的三角形面积的三分之四。但在阐述了如何用力学方法发现这个定理之后，他继续说道：“这里陈述的事实并没有被使用的论证所证明；但那个论证对结论为真给出了某种暗示。”然后他又提到了他在《论抛物线的求积》（On the Quadrature of the Parabola）中给出的对这个定理的证明，在那里他的确提供了两个证明，一个使用了力学方法，另一个使用了纯几何方法。正如希思所指出的，引人注目的是，现代数学家会认为力学论证足以证明这个定理，而阿基米德则坚称他的力学方法不是证明的方法，而只是发现的方法。事实上，正因为他相信这种方法可能对其他研究者有用，他才讲述了自己最初是如何发现这个定理的。在通常情况下，发现过程的所有痕迹都已经从希腊数学文本中移除了。一般说来，希腊数学家们愿意发表的——也就是愿意与同行交流的——仅仅是他们研究的最终成果，显示为一组得到严格证明的定理，并以一个演绎系统出现。我们看到的是所谓的“综合”，而前面的“分析”4或者任何发现过程的痕迹都没有保留下来。阿基米德对其力学方法的论述实属例外，但是显然，他也赞同通常的观点，即定理的发现不如定理的证明重要。对力学概念的运用是阿基米德几何学的一个区别性特征。相反，他对某些力学问题的处理是几何的。这方面最好的例子是静力学和流体静力学，在这些领域，他的工作同样极富原创性。虽然以前有过关于杠杆定律的讨论，比如在《论力学》（On Mechanics）中，这部论著是亚里士多德的一位追随者写的，见于亚里士多德全集，但阿基米德在《论平面的平衡》（On the Equilibrium of Plane）中才第一次对静力学的基本定理加以证明和系统化，而在流体静力学领域，据我们所知，在他之前根本没有什么有名的先驱者。

8维特鲁威讲述的阿基米德如何解决王冠问题的故事与现存的水力学著作本身之间的对比很有启发性。在《建筑十书》（On Architecture，第九卷，前言9 ff）中，维特鲁威说，国王希罗要阿基米德去查明为他做的王冠是否是纯金的。王冠的重量与承包商收到的黄金重量相符，但承包商是否在黄金中掺入了白银呢？据说阿基米德在浴缸中发现了问题的解决方法，他观察到，他的身体越是沉入水中，溢出浴缸的水就越多。这使他想到制作另外两块与王冠等重的东西，一块是金的，另一块是银的，将它们分别浸入盛满水的容器中，测量每一块排出的液体量：如果王冠排出的水比等重量的黄金更多，则表明存在一种合金。每一位学生都知道，阿基米德跳出浴缸，赤身裸体地跑回家，大喊着：“尤里卡——我找到了！”这个故事在几个方面值得商榷。甚至对合金比例的证明方法可能也不正确。阿基米德并未测量这三个东西排出的水量，他可能只是把它们放在水中称了一下，然后记录下它们明显减轻的重量。这同样可以揭示出三个东西比重的差别和合金比例，而且事实上，与第一种方法不同，它所运用的方法包含了所谓的阿基米德原理。然而，即使维特鲁威的故事是虚构的，它仍然捕捉到了发现问题解决方案那一刻的兴奋。但那样一来，这个故事和阿基米德本人的论著《论浮体》（On Floating Bodies）之间便形成了明显反差。在《论浮体》中，发现的兴奋被代之以几何学证明的冷静逻辑。这部著作先以纯正的欧几里得风格提出了第一条假设，它与必须假定的液体性质有关。例如，第一卷证明了“任何比液体轻的固体如果置于液体中，其浸入的深度将使固体的重量等于排出液体的重量”（命题5，希思的释义），以及包含所谓阿基米德原理的命题：

Öéèê9ëèíì?éè+<Aîïñéèóò<r&éè+ôö9êõAú?ùëèèûü'9éè9êõR†°Q¢£对最后这个命题的证明非常简单，但此后，所证明的命题以及在证明中使用的几何学变得越来越复杂。在第一卷论述了关于球冠的另外两个命题之后，阿基米德又在第二卷论述了关于旋转抛物面的问题（抛物线绕轴旋转所生成的图形），还研究了不同形状和比重的抛物面弓形在液体中的稳定性条件。静力学著作《论平面的平衡》也采用了类似的形式。秤和各种杠杆的使用早已使人们熟知杠杆的某些基本性质。《论力学》中讨论过一些实际问题，比如为什么较大的秤比较小的秤更精确，为什么同一个绞盘周围较长的杆比较短的杆更容易移动。阿基米德著作的新颖之处在于对静力学的基本命题作了严格的演绎证明。他先是提出了七条假设，比如“相等距离的等重物体保持平衡，不等距离的等重物体不保持平衡，而是朝着距离较远的重量倾斜”（假设1）。然后证明了一系列简单命题，大多是通过“归谬法”。这为在两个基本命题（命题6和命题7）中证明杠杆定律铺平了道路。在这两个基本命题中，他先后就可公度量和不可公度量证明了，两个量在与量成反比的距离上保持平衡。第一卷和第二卷的其余部分讨论了如何确定平行四边形、三角形和抛物线弓形等各种平面图形的重心。与《论力学》中反复引用经验数据完全相反，阿基米德的著作讨论了用理想的数学方式表述的静力学问题。摩擦、秤本身的重量，事实上每一个额外的物理因素都没有被理会。这种处理方法纯粹是几何的，全书是以欧几里得的《几何原本》为典范所作的演绎证明练习，而它本身又是将数学应用于物理问题的典范。另外两位重要的希腊化数学家，即昔兰尼的埃拉托色尼和佩尔吉的阿波罗尼奥斯，可以更简要地讨论一下。正如我们所看到的，埃拉托色尼与阿基米德同时代并与之相识，他在数学、天文学、地理学、音乐、哲学、语言学和文学等许多领域都享有盛誉。因此，他获得了“五项全能和第二”（Pentathlosand Beta）的昵称——暗示他在任何领域都不是至高无上的。尽管如此，托勒密三世还是邀请他教导儿子菲洛帕托（Philopator），并任命他为亚历山大里亚图书馆的馆长。不幸的是，我们关于他的信息完全依靠二手资料。就其科学工作而言，我们知道他为自公元前5世纪以来困扰着数学家的立方倍积问题提出了一种新的解决方案。他还被认为发现了一种寻找素数的粗糙方法，即所谓的埃拉托色尼筛法。但从我们的观点来看，埃拉托色尼最有趣的工作是把数学应用于地理学。希腊地理学家很早就把世界划分成不同的区域，但埃拉托色尼的地图是第一幅根据经纬线系统详细绘制的世界地图。他还根据在阿斯旺和亚历山大里亚所作的观测给出了地球尺寸的近似值。在夏至日正午，一根直立的日晷在阿斯旺没有投下影子，而在亚历山大里亚，日晷在同一时刻投下了7.2°的影子。通过简单的几何学，可以给出阿斯旺-亚历山大里亚这个弧在地心所张角度的近似值（见图3）。埃拉托色尼认为，阿斯旺和亚历山大里亚在同一经线上（尽管事实上阿斯旺在亚历山大里亚以东3°），并且取两点之间的距离为5000斯塔德。由此可得地球周长为250000斯塔德，尽管有其他文献记载，他实际采用的是252000斯塔德——无论是重新观察的结果，还是（这是更有可能的）纯粹为了有一个更方便的数字来细分周长。人们自古以来就知道斯塔德有不同的值，我们无法确定埃拉托色尼使用的是哪个值。通常认为，他使用的斯塔德是157.5米，由此给出两极周长为39690公里，与现代值40009公里相近，但至少有另外两种截然不同的可能性——斯塔德分别为1/8和1/10罗马英里，即大约186米和148.8米，由此给出的结果大大偏离真实的数值，大约高17%或低6%。不过，其结果的准确性不如他使用的方法重要。

最后，阿波罗尼奥斯比埃拉托色尼和阿基米德年纪略轻，主要活跃于公元前220年到公元前190年之间。他出生在潘菲利亚的佩尔吉，访问过以弗所和帕加马。我们也听说过他在亚历山大里亚，他的大部分工作可能就是在那里完成的。我们的资料中提到了一些数学和天文学论著，但他的一部主要作品是《圆锥曲线论》（On Conics）。此书分为八卷，其中前四卷以希腊文保存下来，第五卷到第七卷则保存在阿拉伯文译本中，第八卷失传了。这是希腊数学的一部杰作。以前曾有几位数学家讨论过圆锥曲线，比如我们听说过欧几里得有一部关于圆锥曲线的论著。但阿波罗尼奥斯第一次对它作了全面系统的讨论。椭圆、抛物线和双曲线这三种圆锥曲线的名称都来自阿波罗尼奥斯。它 们 在 阿 波 罗 尼 奥 斯 之 前 的 名 称 与 最 初 获 得这些曲线的方式相对应：它们被认为是顶角分别为锐角、直角和钝角的三种直圆锥体的截面，在每一种情况下，截面都是垂直于圆锥母线的平面（见图4）。阿波罗尼奥斯在第一卷前几个命题中引入了新的希腊术语——椭圆、抛物线和双曲线，并由此导出了这三种曲线的基本性质。证明了这些之后，阿波罗尼奥斯全面研究了与圆锥曲线有关的问题，由某些数据来构造圆锥曲线、切线、焦点性质、圆锥曲线的相交，等等。

公元前2、3世纪数学家的工作也许是希腊科学最伟大的——当然也是最持久的——成就。在之前的几个世纪里，数学的作用及其与物理学和哲学的关系基本上是不确定的，例如，这可见于被亚里士多德归于毕达哥拉斯学派的“万物皆数”学说，它虽然具有启发性，但却不易理解。5然而在柏拉图之后，特别是在亚里士多德之后，数学更加独立于哲学，并且在一系列杰出的著作中走向成熟。诚然，正如我们已经看到的，希腊数学背后的许多基本假设仍然反映着哲学上的争论，它的一些论证方法是严格数学的，另一些则是一般的演绎逻辑所共有的，但数学被更明确地界定为一门独立的学科，这反映在公元前2、3世纪从事数学的人更大程度的专业化上。他们的兴趣往往更加局限于数学本身的各个分支，而将物质构成或自然物质的分类等主题排除在外。柏拉图曾指出，数学从属于辩证法。但是在公元前2、3世纪，数学为系统地展示知识体提供了最佳范例。欧几里得、阿基米德和阿波罗尼奥斯对证明清晰而有条理的呈现成为希腊科学其余部分的典范。此外，希腊人不仅在纯粹数学方面出类拔萃，而且认识到有可能用数学来解决物理问题，尽管他们只在一些相对简单的领域这样做了。伊壁鸠鲁和斯多亚学派哲学家在物质构成等物理问题上大胆而纯思辨的思想，与 阿 基 米 德 通 过 将 数 学 应 用 于 物 理 问 题 而 得 到 的 持 久 结 果——尤其是杠杆定律和浮体定律——形成了鲜明的对比。我们讨论的例子来自静力学、流体静力学和地理学，其他例子可见于和音学和光学。然而，更重要的是数学在天文学中的应用，这需要单独讨论。